Fonctions affines

I/ Fonctions affines

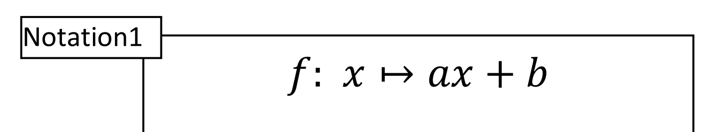
1°) Définition

Une fonction est affine lorsque l'image d'un nombre x **peut** s'écrire sous la forme $ax + b$ où a et b sont deux nombres quelconques connus.

Les nombres **a** et **b** sont les **coefficients** de la fonction affine

2°) Notation et exemples

Une fonction affine nommée f peut s'écrire de 2 façons différentes :



Notation 2

$$f(\,x) = ax + b$$

Où a et b sont deux nombres quelconques connus.

Exemples :

$x \mapsto 2x + 1$ est une fonction affine (les coefficients sont :a=2 et b=1)

$x \mapsto 5{,}3 + 9{,}01x$ est une fonction affine (les coefficients sont : a=9,01 et b=5,3)

$x \mapsto 15x$ est une fonction affine (les coefficients sont : a=15 et b=0)

$x \mapsto 31$ est une fonction affine (les coefficients sont : a=0 et b=31)

II/ Tableau de valeurs avec une fonction affine

Mode d'emploi

x	-2	-1	0	1	2
f (x)					

On veut compléter le tableau de valeurs :

On considère la fonction affine f : $x \mapsto -2x + 1$

En général on a : f (x) $= -2x + 1$

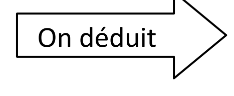
En particulier : f(-2)=-2×(-2)+1=**5**

f(-1)=-2×(-1)+1=**3**

f(0)=-2×(0)+1=**1**

f(1)=-2×(1)+1=**-1**

f(2)=-2×(2)+1=**-3**



x	-2	-1	0	1	2
f (x)	**5**	**3**	**1**	**-1**	**-3**

III/ Déterminer algébriquement une fonction affine à partir de 2 images

1°) Méthode basée sur la résolution d'un système d'équations

On considère une fonction **affine f** telle que **f(-2)=3** et **f(4)=5.**
Déterminons la définition de la fonction f.

Etape1 : On sait que la fonction est **affine** donc pour tout nombre x, f(x)=ax+b
Il reste à chercher les valeurs de a et b.

Etape2 : On sait que **f(-2)=3** donc a×(-2)+b=3 c'est-à-dire **-2a+b=3**

Etape3 : On sait que **f(4)=5** donc a×(4)+b=5 c'est-à-dire **4a+b=5**

Etape4 : On résout le système $\begin{cases} \mathbf{-2a + b = 3} \\ \mathbf{4a + b = 5} \end{cases}$ avec la méthode de son choix (Voir cours)

On trouve a=$\frac{1}{3}$ et b=$\frac{11}{3}$

Conclusion : La fonction f est définie par f : $x \mapsto \mathbf{\frac{1}{3}}\ x + \mathbf{\frac{11}{3}}$

2°) Méthode générale

a) **Propriété**

On considère une fonction **affine f** telle que $f(x_1)=y_1$ et $f(x_2)=y_2$

Le coefficient **a** est égal à $\frac{y1-y2}{x1-x2}$

a = $\frac{y1-y2}{x1-x2}$

Le coefficient **b** est égal à la fois à y_1-a x_1 et à y_2-a x_2

b =y_1-a x_1 et **b**= y_2-a x_2

Preuve :

On nomme la fonction f . $f : x \mapsto a\ x + b$

$f(x_1)=y_1$ donc $y_1=ax_1+b$

$f(x_2)=y_2$ donc $y_2=ax_2+b$

Donc **b=y_1-ax_1 =y_2-ax_2** et ainsi y_1-ax_1 =y_2-ax_2 d'où l'égalité y_1-y_2=ax_1 -ax_2 =a(x_1 -x_2)

et **a**= $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

Application

On considère une fonction **affine f** telle que **f(-1)=2** et **f(3)=10.**
On déduit les coefficients a et b de cette fonction affine :

Ici x_1=-1, y_1=2, x_2=3 et y_2=10 donc **a**=$\frac{2-10}{-1-3}$ = $\frac{-8}{-4}$ **=2** et **b** =2-2×(-1) =**4**

La fonction f est définie par f : $\boldsymbol{x \mapsto 2\ x + 4}$

IV / Représenter graphiquement une fonction affine

1°) Propriétés

Propriété1 :

La représentation graphique de toute fonction **affine** est simplement une **droite** (non verticale).

Propriété2 :

On considère la fonction affine $f : x \mapsto a\,x + b$ et (d) **la droite** qui est sa représentation graphique.
Pour tout point M de coordonnées (x_M ;y_M) appartenant à la droite (d)
il y a un lien entre son abscisse x_M et son ordonnée y_M qui est la relation :

$$y_M=f(x_M)=ax_M+b$$

Propriété3 :

On considère la fonction affine $f : x \mapsto a\,x + b$
pour tout nombre x le point de coordonnée (x ;ax+b) est un point appartenant à l**a droite** qui la représentation graphique de la fonction f.

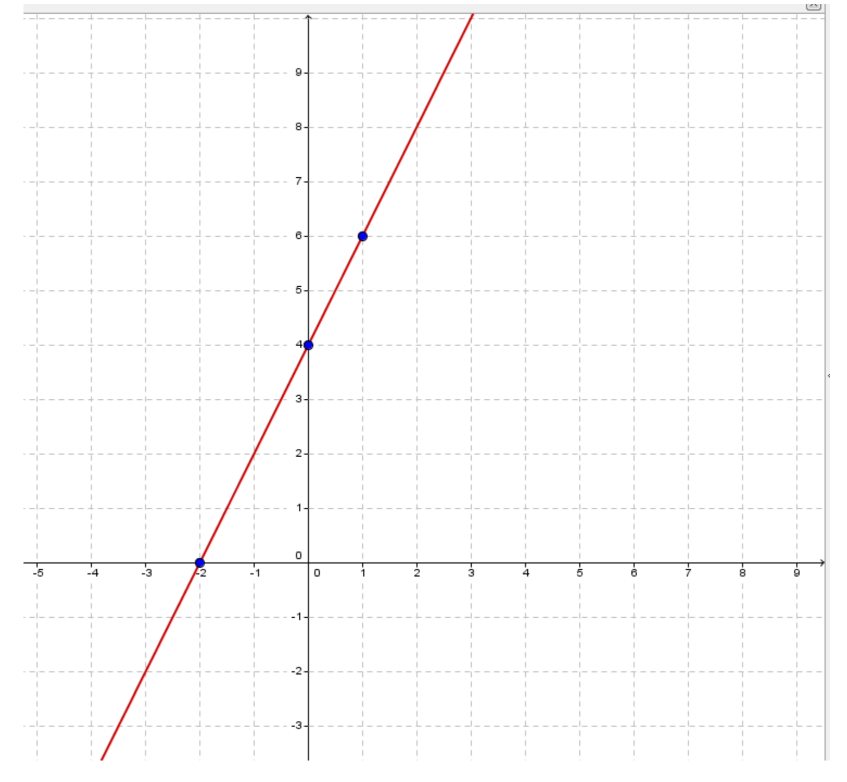
2°) Méthode de construction de la droite

On considère la fonction affine $f : x \mapsto 2\,x + 4$

On complète un tableau de valeurs pour obtenir 3 points. Sauf erreurs les 3 points sont alignés.

	Point 1	Point2	Point3
x (valeur de son choix)	**-2**	**0**	**1**
$2\,x + 4$ (Image de x par la fonction *f)*	**0**	**4**	**6**

On place les 3 points de coordonnées (-2 ;0) , (0 ;4) et (1 ;6) et on trace la droite passant par ces 3 points.



V/ Déterminer algébriquement une fonction affine à partir d'une représentation graphique.

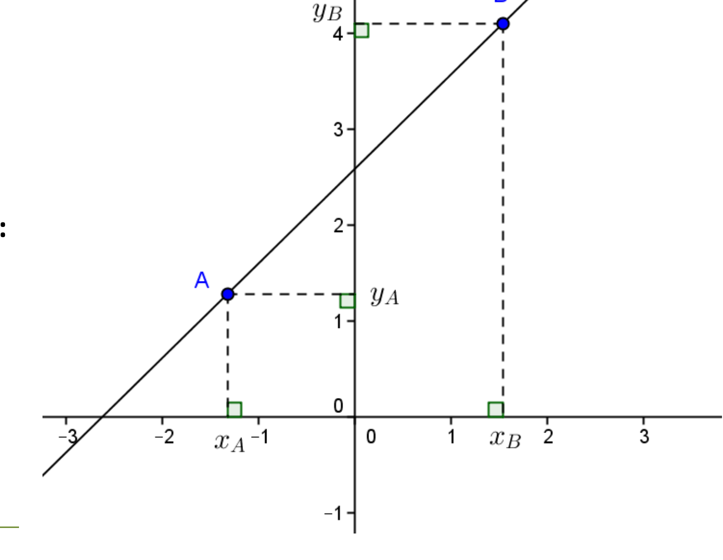
1°) Propriété :

Une droite dans un repère est forcément la représentation graphique d'une fonction affine f.
Lorsque qu'elle passe par les points $A(x_A\ ;y_A)$ et $B(x_B\ ;y_B)$
alors le coefficient a de f est donné par la formule :

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

Et le coefficient b de f est donné par les formules :

$$b=y_B-ax_B \quad \text{et} \quad b=y_A-ax_A$$



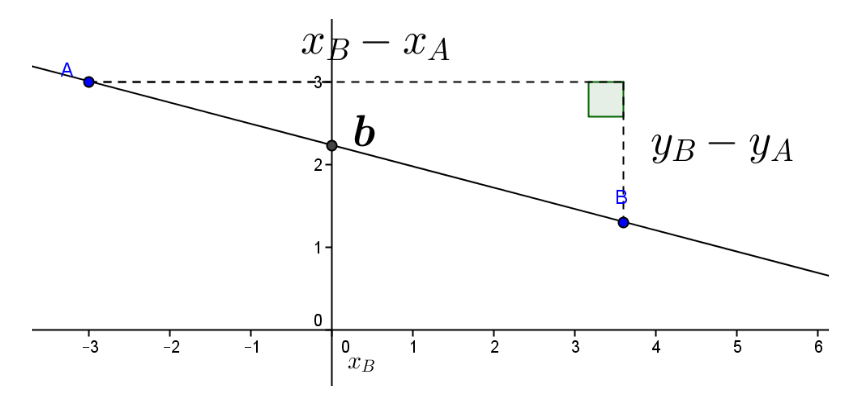
Preuve :

On nomme la fonction f . $f : x \mapsto a\,x + b$

La droite passe par les points $A(x_A\ ;y_A)$ et $B(x_B\ ;y_B)$. donc $f(x_A)=y_A$ et $f(x_B)=y_B$.

D'après la propriété III.2.a et $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ **et** $b=y_A-ax_A=y_B-ax_B$

2°) Interprétation des coefficients

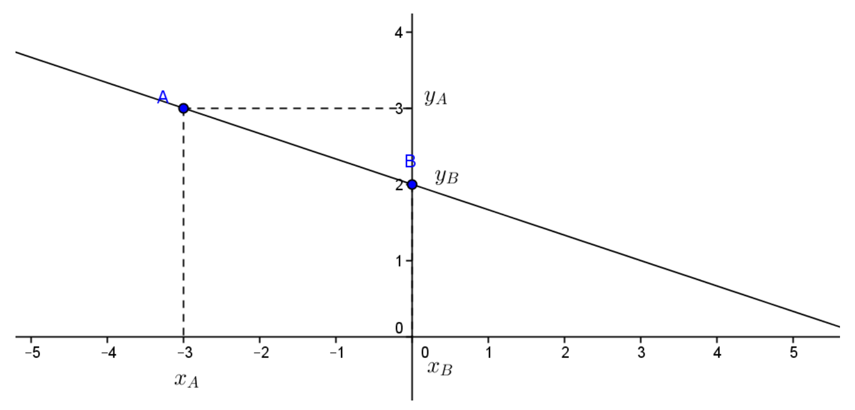


Le coefficient a se nomme le **coefficient directeur** de la droite.
a est un indicateur de la pente de la droite.
si a>0 la fonction f est croissante
si a=0 la fonction f est constante
si a<0 la fonction f est décroissante

Le coefficient b se nomme **l'ordonnée à l'origine** de la droite.
En effet, L'image de 0 par la fonction f est b à partir de sa forme générale $x \mapsto a\,x + b$.
Donc le point de coordonnées (0,b) appartient toujours à la droite ..
b est un indicateur de la position de la droite.

3°) Exemple et méthode de lecture directe sur graphique des coefficients a et b

On a représenté ci-dessous une fonction f c'est un droite donc la forme générale de $f : x \mapsto a\,x + b$



On voit que la droite bleu passe par les points de coordonnées A (-3 ; 3) et B (0; 2).

Méthode 1 (utilisation des formules) :

a= $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{0-(-3)}$ **=** $-\frac{1}{3}$

Avec le point A, on trouve : **b**=y_A-ax_A =3- $(-\frac{1}{3})$×(-3)=3-1**=2**

ou si l'on préfère avec le point B, on trouve : **b**=y_B-ax_B = 2- $(-\frac{1}{3})$×0**=2**

Bilan : $f : x \mapsto -\frac{1}{3}\,x + 2$

Méthode 2 (par lecture graphique)

On passe du point A au point B en avançant de 3 unités (+3) et en descendant de 1 unité (-1).

On peut conclure directement que a=$-\frac{1}{3}$ par lecture graphique.

L'ordonnée à l'origine est 2

On peut conclure directement que b=2 par lecture graphique.

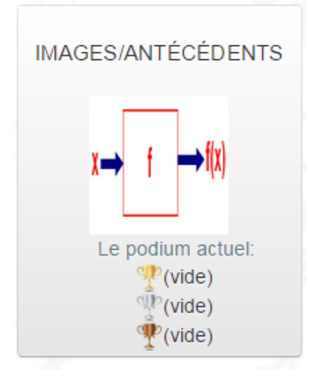
Bilan : $f : x \mapsto -\frac{1}{3}\,x + 2$

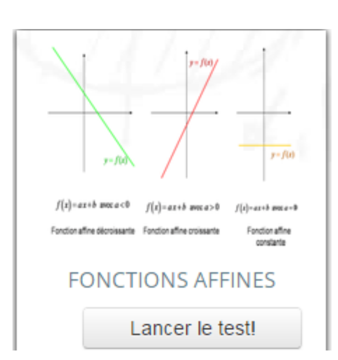
V I/JE ME TESTE

Dans le menu Bonus



Faire les tests





Intermaths.info